

Vorlesung: Bildgebende Verfahren in der Medizin I

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel 2. Prüfer: Axel Loewe, M.Sc.

Klausur

25. Februar 2014
Beginn: 13:00 Uhr

Familienname:	AUFKLEBER
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein! Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare! Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Gesamt
Punkte:	12	4	11	12	11	6	6	4	3	9	4	82
erreicht:												

Note:_____

Röntgen

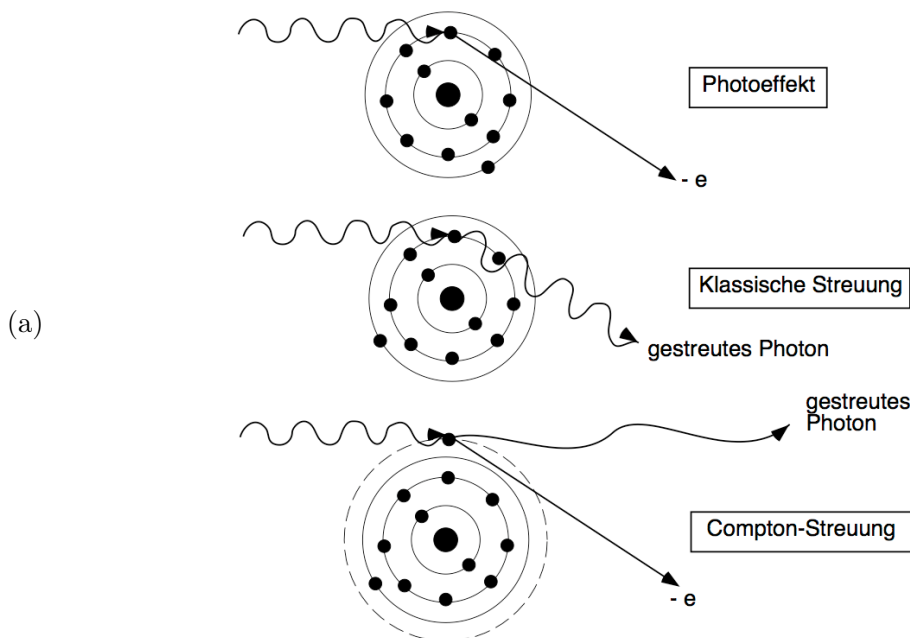
Frage 1

(12 Punkte)

Die Schwächung von Röntgenstrahlung im Körper wird von unterschiedlichen Wechselwirkungsprozessen verursacht.

- Nennen Sie 3 Wechselwirkungsprozesse, die im Energiebereich der diagnostischen Röntgenstrahlung zur Bildgebung beitragen. Nennen und skizzieren Sie diese Wechselwirkungen. (6 Punkte)
- Welcher Parameter beschreibt die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung? Wie ist der Parameter definiert? Geben Sie die Formel an und nennen Sie die Einheit dieses Parameters. (2 Punkte)
- Von welchen 4 Größen hängt die Schwächung von Röntgenstrahlen in Materie im Wesentlichen ab? Wie ändert sich die Schwächung mit der Zunahme der jeweiligen Größe? (4 Punkte)

Lösung:



- (b) Die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung (WW) wird durch den Wirkungsquerschnitt beschrieben:

$$\sigma_{ww} = \frac{\mu_{ww}}{n_{ww}}$$

mit:

- σ_{ww} = Wirkungsquerschnitt der WW
- μ_{ww} = Schwächungskoeffizient der WW
- n_{ww} = Teilchendichte der Teilchen, mit denen die WW stattfindet

Der Wirkungsquerschnitt hat die Einheit einer Fläche, also m^2 oder cm^2 .

- (c)
- **Wellenlänge:** Schwächung steigt mit der Wellenlänge
 - **Ordnungszahl:** Schwächung steigt mit der Ordnungszahl des durchstrahlten Stoffs
 - **Dichte:** Schwächung steigt mit der Dichte des durchstrahlten Stoffs
 - **Dicke:** Schwächung steigt mit der Dicke des durchstrahlten Stoffs

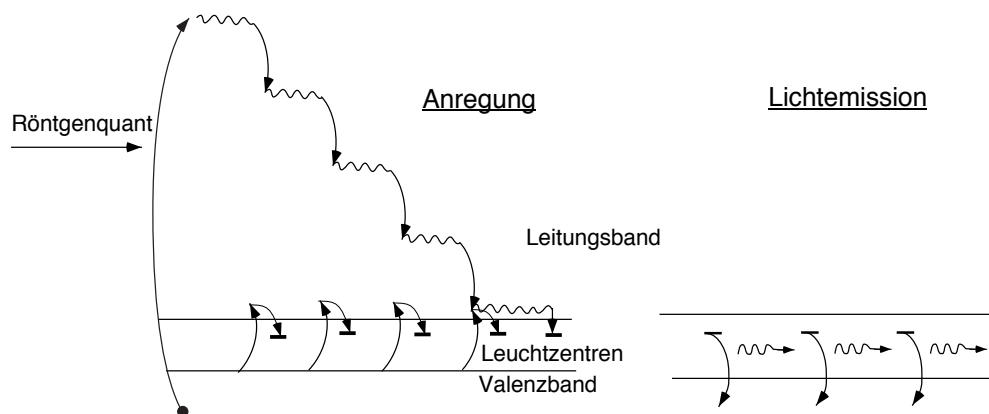
Frage 2**(4 Punkte)**

- (a) Beschreiben Sie die physikalischen Prozesse, die sich in einer Verstärkerfolie abspielen. (3 Punkte)
- (b) Für eine Röntgenverstärkerfolie sind folgende Größen gegeben: (1 Punkt)
- Detective Quantum Efficiency (DQE): 0,48
 - Konversionsgrad: 20%
 - mittlere Wellenlänge im Spektrum: 550 nm (2,26 eV)

Wie viele Photonen werden im Mittel pro einfallendem Röntgenquant (100 keV) erzeugt?

Lösung:

- (a) Das eintreffende Röntgenquant regt Elektronen an und hebt sie auf ein höheres Energieniveau. Bei der Rückkehr in den Grundzustand wird mehrfach Energie frei, die weitere Elektronen auf höhere Energieniveaus hebt. Viele dieser angeregten Elektronen relaxieren in Leuchtzentren. Von hier springen diese nach sehr kurzer Zeit unter Aussendung je eines Photons entsprechender Energie wieder auf das Ausgangsniveau zurück.



- (b)

$$N = \frac{E_{Quant}}{E_{Photon}} \cdot DQE \cdot Konversionsgrad = \frac{100 \text{ keV}}{2,26 \text{ eV}} \cdot 0,48 \cdot 0,2 = 4248$$

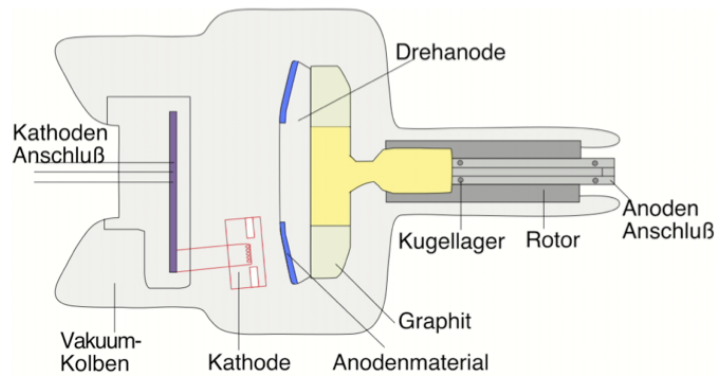
Frage 3**(11 Punkte)**

Bei der Erzeugung von Röntgenstrahlen wird der Großteil der Energie in Wärme umgewandelt, die schnell abgeführt werden muss damit das Anodenmaterial nicht schmilzt.

- (a) Wie wird dieses Problem üblicherweise gelöst? Skizzieren Sie eine derartige Röntgenröhre und beschriften Sie die Komponenten. Welche Materialien werden typischerweise verwendet und warum? (7 Punkte)
- (b) Wie sieht der Temperaturverlauf über der Zeit in einem Punkt der Anode qualitativ aus? Skizzieren Sie den Verlauf. (2 Punkte)
- (c) Wie verändert sich der Verlauf wenn der Sockel durch ein Material mit höherer spezifischer Wärme ersetzt wird? Skizzieren und erklären Sie die Veränderung. (2 Punkte)

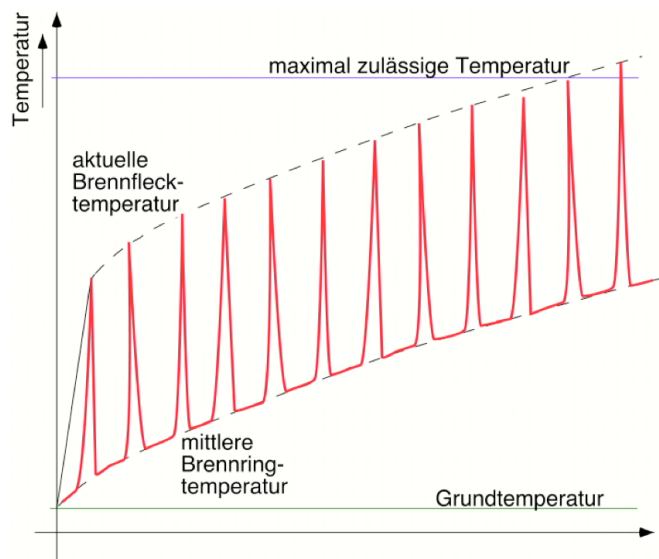
Lösung:

(a)

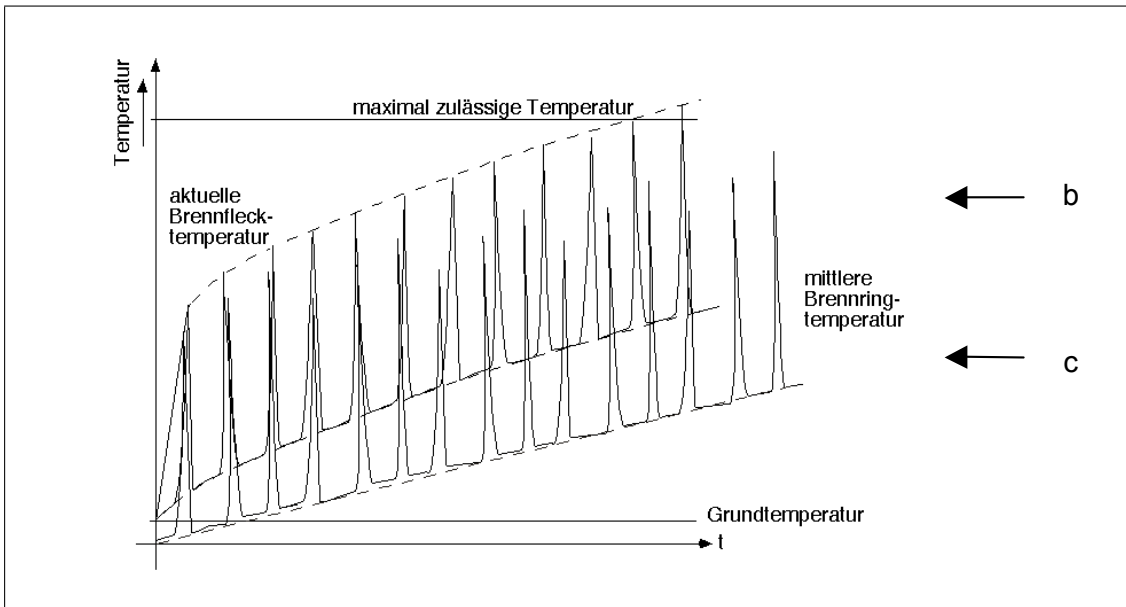


Mit der Drehanode erreicht man, dass die eingebrachte Wärme sich auf einem ganzen Ring verteilt, ohne dass der Fokus dadurch größer wird. Als Anodenmaterial wird fast immer Wolfram verwendet, da es die Qualitätskriterien (hohe Ordnungszahl, hohe Schmelztemperatur, hohe Wärmeleitfähigkeit) am besten erfüllt. Die Schicht darunter besteht meist aus Molybdän, das zwar keine so hohe Ordnungszahl, dafür aber eine hohe Wärmeleitfähigkeit aufweist. Der Sockel der Drehanode besteht manchmal aus Graphit, das eine 10mal höhere Wärmekapazität hat als Wolfram.

(b)



(c) Hier kann mehr Wärme gespeichert werden, so dass der Verlauf insgesamt unterhalb des Verlaufs aus b) bleibt.



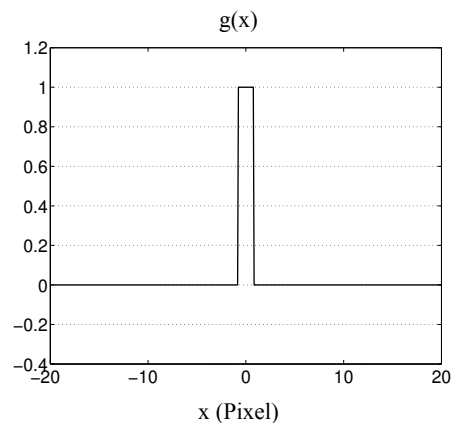
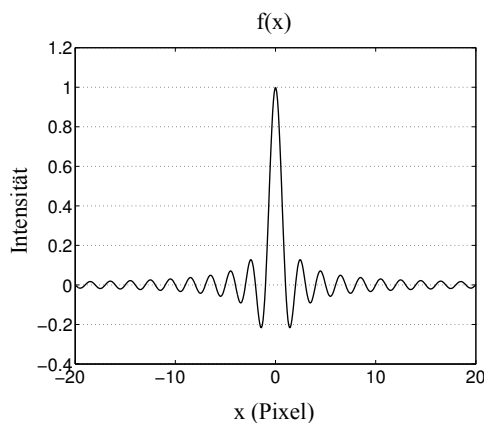
Systemtheorie

Frage 4

(12 Punkte)

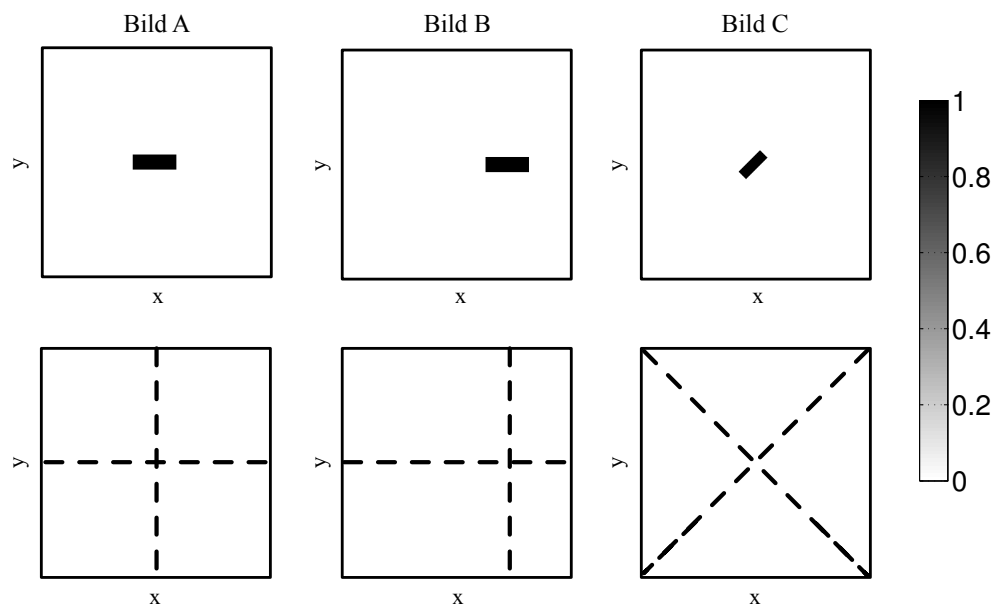
- (a) Im Folgenden sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie das Betragsspektrum der Fouriertransformierten der Faltung der beiden Funktionen qualitativ (siehe untenstehende Formel). Skizzieren Sie ebenso eventuelle Zwischenschritte. (4 Punkte)

$$|\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\}|$$



- (b) Welche Frequenzauflösung (Δu) lässt sich mit einer diskreten Fouriertransformation, die 512 Punkte umfasst, erzielen wenn der Ortsraum mit einer Auflösung von 0,5 mm abgetastet wird? (2 Punkte)
- (c) Im Folgenden sind 3 Bilder dargestellt, die alle das gleiche Objekt in unterschiedlichen Positionen zeigen. Skizzieren Sie die Betragsspektren der 2D Fouriertransformierten dieser Bilder qualitativ. Skizzieren Sie außerdem die Betragsspektren der 1D-Fouriertransformierten entlang der mit unterbrochenen Linien darunter dargestellten Hauptachsen des Objekts qualitativ. (6 Punkte)

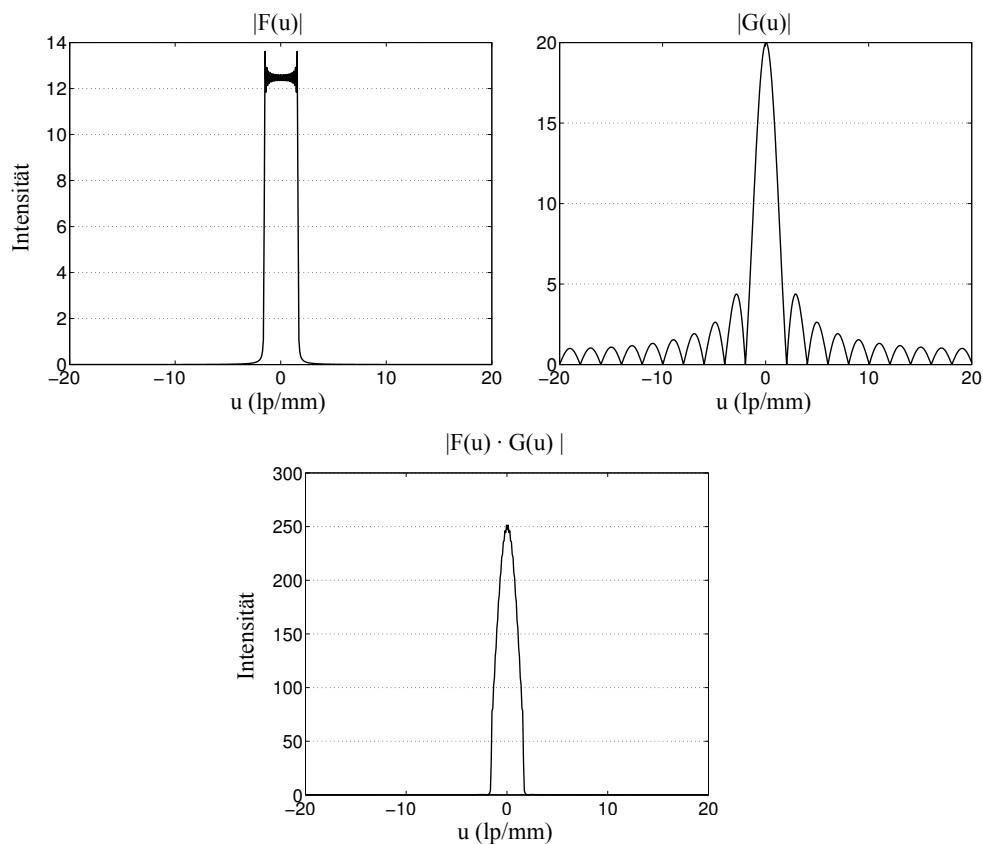
In den Bildern A, B und C treten nur die Werte 0 und 1 auf, in den gefragten Betragsspektren können auch Zwischenwerte auftreten.

**Lösung:**

- (a) Nach dem Faltungstheorem ergibt sich die Fouriertransformierte der Faltung von $f(x)$ und $g(x)$ als Produkt der Fouriertransformierten von $f(x)$ und $g(x)$:

$$|\mathfrak{F}\{f(x) * g(x)\}| = |\mathfrak{F}\{f(x)\} \cdot \mathfrak{F}\{g(x)\}|$$

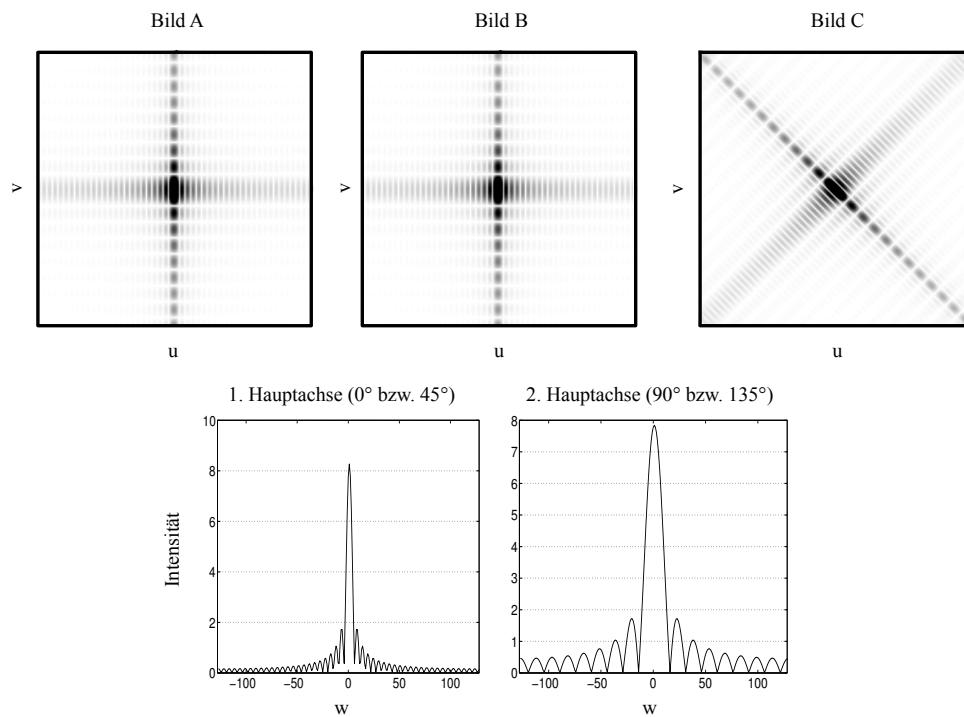
Die gesuchte Funktion ergibt sich damit wie folgt:



- (b) Die Frequenzauflösung ergibt sich wie folgt:

$$\Delta u = \frac{1 \text{ lp}}{N \cdot \Delta s} = \frac{1 \text{ lp}}{512 \cdot 0,5 \text{ mm}} = \frac{1}{256} \text{ lp/mm} = 3,9 \times 10^{-3} \text{ lp/mm}$$

- (c) Die Betragsspektren von Bild A und B unterscheiden sich nicht. Nur die Phase hat sich geändert, dies ist aber im Betragsspektrum nicht sichtbar. Das Spektrum von Bild C ist um 45° rotiert. Die Betragsspektren der 1D Fouriertransformierten entlang der Hauptachsen unterscheiden sich nicht.



Bildverarbeitung

Frage 5

(11 Punkte)

- (a) Im Folgenden sind ein Originalbild sowie 4 Bilder, die durch Filterung dieses Bildes entstanden sind, dargestellt. Ordnen Sie die Bilder A–D den Filtern 1–4 zu. Benennen Sie außerdem die Filter 1–4. (4 Punkte)



Originalbild



Bild A

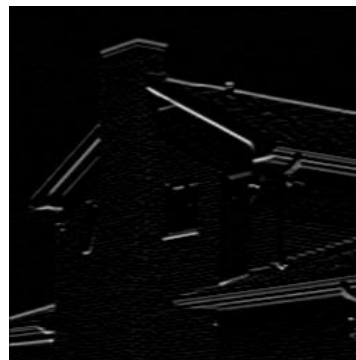


Bild B

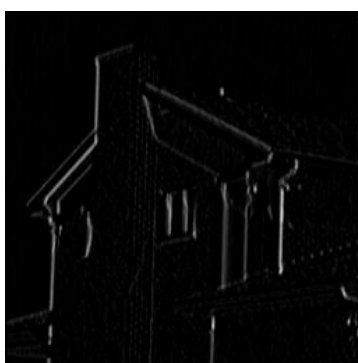


Bild C



Bild D

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filter 1

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Filter 2

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Filter 3

$$\frac{5}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filter 4

- (b) Filter 1 und Filter 2 (bzw. Filter 3) aus a) haben jeweils einen Nachteil, der durch jeweils einen anderen Filter verhindert wird. Erläutern Sie diese Nachteile kurz. Be-

nennen sie die 2 verbesserten Filter mitsamt Zuordnung zu den Filtern 1 und 2 aus a) und geben sie den Filterkern an (Skalierung beliebig).

(c) Wenden Sie den Filterkern

(2 Punkte)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

auf folgendes Bild an:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Ausmaße des gefilterten Bilds sind in jeder Dimension um 2 Pixel kleiner als die Ausmaße des Ausgangsbilds.

(d) Kann der Medianfilter als komplexe Übertragungsfunktion angegeben werden? Falls ja, gegeben sie den Filterkern an. Falls nein, begründen Sie warum nicht. (1 Punkt)

Lösung:

- (a)
- Bild A — Filter 1 (Mittelwertfilter)
 - Bild C — Filter 2 (Gradientenfilter in x-Richtung)
 - Bild B — Filter 3 (Gradientenfilter in y-Richtung)
 - Bild D — Filter 4 (Laplace Filter)
- (b) Der Kern des Mittelwertfilter entspricht einer zweidimensionalen Rechteckfunktion. Diese weist im Frequenzbereich Nebenmaxima auf, die sich ungünstig auf das gefilterte Bild auswirken. Der Gaußfilter fällt hingegen sowohl im Frequenz- wie auch im Ortsbereich monoton.
Einfache Gradientenfilter verstärken im Bild vorhandenes Rauschen. Der Sobelfilter kombiniert die Gradientenbildung mit Glättung und verhindert so ein zu starkes Anheben des Rauschens.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaußfilter

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sobelfilter in
x-Richtung

(c)

$$\begin{pmatrix} -15 & 12 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$$

- (d) Beim Medianfilter handelt es sich um ein Rangordnungsfilter. Da Rangordnungsoperationen nicht linear sind lässt sich keine Übertragungsfunktion angeben.

Computertomographie

Frage 6

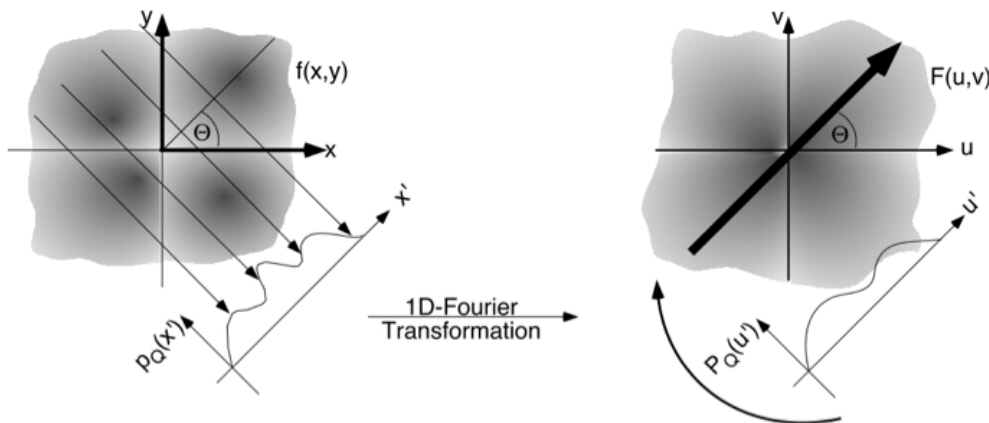
(6 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie das Fourier-Scheiben-Theorem.

Lösung:

Fourier-Scheiben-Theorem:

Sei eine Funktion $f(x, y)$ gegeben und $F(u, v)$ deren 2D-Fouriertransformierte. Sei $p_\Theta(s)$ eine Projektion von $f(x, y)$ und $P_\Theta(w)$ deren 1D-Fouriertransformierte. Dann beschreibt $P_\Theta(w)$ die Werte von $F(u, v)$ auf einem Radialstrahl zum Winkel Θ .



Beweis:

Nehmen wir an, dass $\Theta = 0$. Dann kann $p_0(s)$ als $p_0(x)$ geschrieben werden und die Projektion wird definiert durch:

$$p_0(s) = p_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Die 1D-Fouriertransformierte von $p_0(x)$ ergibt sich als:

$$P_0(u) = \mathfrak{F}(p_0(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(x) e^{-j2\pi ux} dx.$$

Dies lässt sich umformen:

$$\begin{aligned} P_0(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] e^{-j2\pi ux} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+0y)} dx dy \\ &= F(u, 0). \end{aligned}$$

Die 1D-Fouriertransformierte einer Projektion zum Winkel $\Theta = 0$ ergibt also die Werte der 2D-Fouriertransformierten von $f(x, y)$ auf der u -Achse.

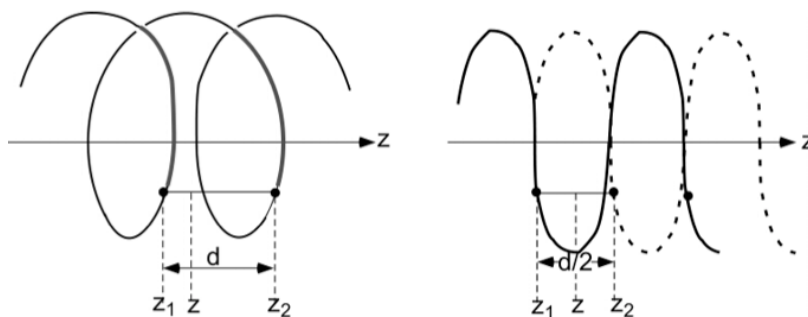
Betrachtet man die Projektion unter $\Theta \neq 0$, kann man das Koordinatensystem so drehen, dass die Projektion auf der x' -Achse durchgeführt wird. In diesem Koordinatensystem ergibt die Fouriertransformierte der Projektion die Werte auf der u' -Achse im Fourierraum $F(u, v)$. Das heißt, dass die Fouriertransformierte einer um den Winkel Θ gedrehten Funktion $f(x, y)$ ebenfalls um genau den gleichen Winkel Θ gegenüber der Fouriertransformierten $F(u, v)$ verdreht ist. Damit ist das Fourier-Scheiben-Theorem bewiesen.

Frage 7**(6 Punkte)**

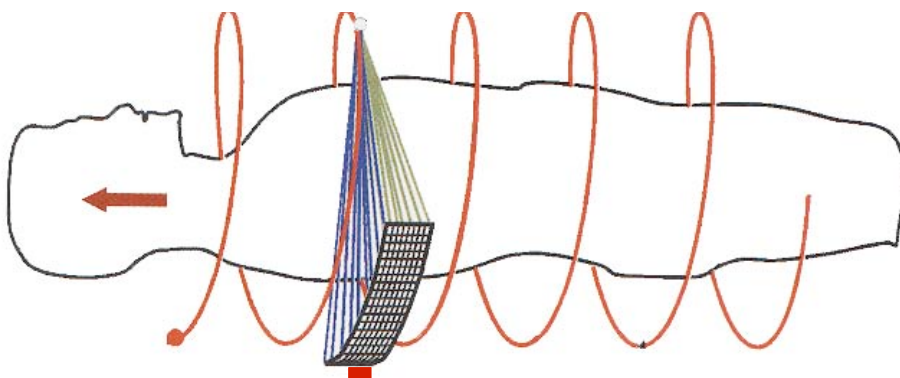
- (a) Was versteht man unter Spiral-CT? Wie werden die Projektionen für die Rekonstruktion gewonnen? (3 Punkte)
- (b) Was versteht man unter Mehrzeilen-CT? Was ist das Problem bei der Bildrekonstruktion? (3 Punkte)

Lösung:

- (a) Spiral-CT ist eine Methode, die es ermöglicht, relativ schnell 3D CT-Aufnahmen zu machen. Dabei wird der Patient kontinuierlich langsam weitergeschoben, während die Röhre um das Zentrum rotiert. Da kein geschlossener Kreis dabei gemessen wird, kann man aus den Messdaten direkt kein Bild rekonstruieren. Um vollständige Datensätze für jede Schicht zu erzeugen, muss eine Interpolation zwischen den Schleifen der Spirale eingesetzt werden. Da die Röhre einen vollen Kreis macht, kann redundante Information eingesetzt werden, so dass effektiv nur in Zwischenebenen im Bereich $0 < z < d/2$ interpoliert werden muss.



- (b) Bei der Mehrzeilen-CT besteht der Detektor aus bis zu 64 Zeilen und rotiert um das Zentrum. Damit kann entweder der Vorschub bei der Spiral-CT beschleunigt werden, oder z. B. bei Herzaufnahmen eine hohe Zeitauflösung erreicht werden. Problem: Die äußeren Detektorzeilen empfangen Kegelstrahlen, die nicht ohne zusätzliche Korrektur eingesetzt werden können.



Frage 8**(4 Punkte)**

Von welchen Größen hängt das Pixelrauschen eines CT-Scanners ab? Geben Sie die Formel für das Pixelrauschen an und benennen Sie die darin vorkommenden Größen. Konstante Vorfaktoren dürfen ignoriert werden.

Lösung:

$$\sigma_{Pixel}^2 = \frac{\pi^2 \cdot \Delta s}{M} \cdot \frac{1}{N} \int_{-w_{max}}^{+w_{max}} |H(w)|^2 dw$$

mit:

- Δs = Detektorabstand
- M = Zahl der Projektionen
- N = mittlere Zählrate bei einer Messung
- $H(w)$ = Filterfunktion für die gefilterte Rückprojektion

Strahlenwirkung

Frage 9**(3 Punkte)**

- (a) Wie ist die Energiedosis definiert und in welcher Einheit wird sie gemessen? (2 Punkte)
- (b) Warum erhält man bei einer Röntgenaufnahme auch für Organe, die sich nicht im Röntgen-Strahlengang befinden eine merkliche Energiedosis? (1 Punkt)

Lösung:

(a)

$$D = \frac{dW}{dm}$$

mit:

- D = Energiedosis
- W = im Volumen deponierte Energie
- m = Masse des Volumens

Die Einheit lautet Gray.

$$\frac{1 J}{1 kg} = 1 Gy$$

- (b) In dem Bereich des Körpers, der direkt durchstrahlt wird entsteht viel Streustrahlung. Diese breitet sich nach allen Seiten aus und kann in anderen Organen absorbiert werden.

Nuklearmedizin

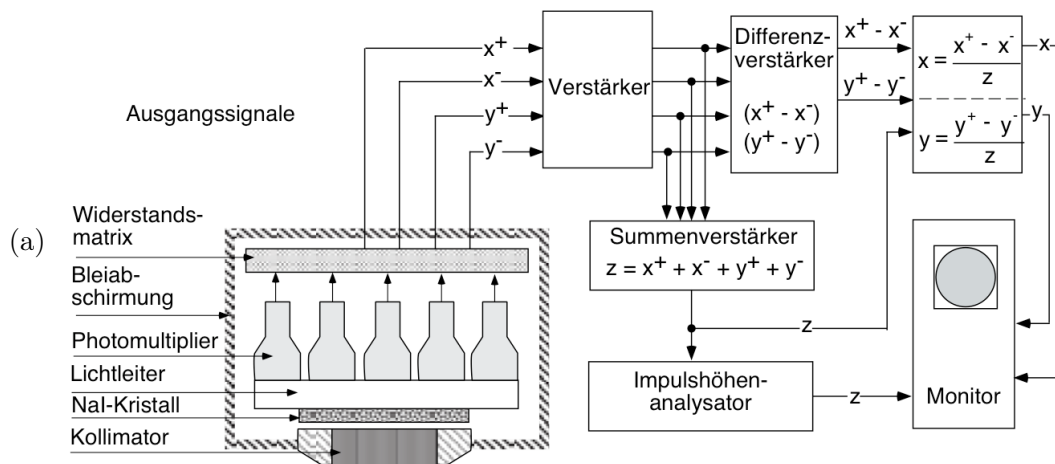
Frage 10

SPECT-Systeme

(9 Punkte)

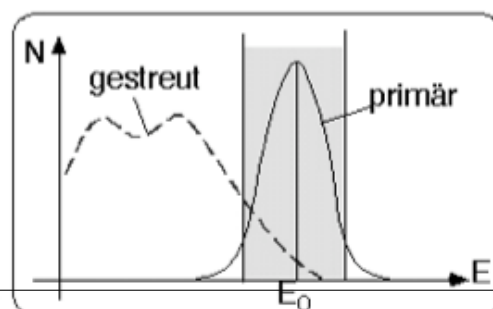
- (a) Skizzieren Sie eine Anger-Kamera (Gamma-Kamera). Beschriften und beschreiben Sie kurz die Komponenten. (5 Punkte)
- (b) Wie wird der Einfallsort des Gammaquants ermittelt (qualitativ)? (1 Punkt)
- (c) Wie erreicht man einen energieaufgelösten Nachweis und warum braucht man eine energieaufgelöste Detektion? Veranschaulichen Sie Ihre Antwort mit einer Skizze der Energieverteilung (qualitativ). (3 Punkte)

Lösung:



- **Kollimator:** Nachweisgebiet wird auf "Säulen" vor der Kamera beschränkt
- **NaI-Kristall / Szintillator:** Umwandlung in sichtbares Licht
- **Photomultiplier:** Lichtnachweis
- **Widerstandsmatrix:** Ermittlung des Schwerpunkts des Lichtblitzes.
Alternativ: viele A/D-Wandler und digitale Berechnung des Schwerpunkts
- **Summensignal:** Maß für die gesamte Lichtintensität
- **Impulshöhenanalysator:** Sortiert gestreute Quanten aus

- (b) Der Einfallsort des Gamma-Quants wird als der "Schwerpunkt" aus allen Photomultiplier-Signalen ermittelt.
- (c) Das Summensignal aller Photomultiplier ist ein Maß für die Energie des eingefallenen Gamma-Quants. Das Summensignal wird auf einen Impulshöhen-Analysator gegeben. Impulse, die eine vorgegebene Schwelle unterschreiten, werden nicht mitgezählt. Auf diese Art werden gestreute Gamma-Quanten unterdrückt. Diese Quanten kommen nicht aus dem Gebiet, in dem sich der Gamma-Strahler angereichert hat.



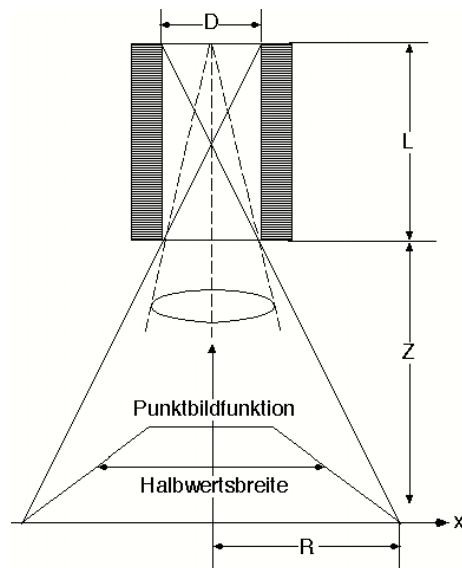
Frage 11**(4 Punkte)**

Kollimator-Kenngrößen

- (a) Was ist die Halbwertsbreite der Punktbildfunktion eines Kollimators? Veranschaulichen (2 Punkte) Sie Ihre Erklärung mit einer Skizze.
- (b) Wie groß ist der Radius der Punktbildfunktion eines Kollimators in Abhängigkeit von (2 Punkte) der Entfernung zwischen Kollimator und Gamma-Strahler mit:
- $L = 24 \text{ mm}$ Dicke des Kollimators
 - $D = 1,11 \text{ mm}$ effektiver Durchmesser des Kollimators

Lösung:

- (a) Zur Darstellung der Punktbildfunktion wird ein idealer punktförmiger Gamma-Strahler vor dem Detektor vorbei bewegt und die Zählrate über dem Ort aufgezeichnet. Die resultierende Punktbildfunktion hat an den Rändern einen Halbschattenbereich und in der Mitte ein Plateau, auf dem sich die Zählrate nur wenig ändert. Die Halbwertsbreite ist der Bereich, in dem die Zählrate die Hälfte des Maximums beträgt.



- (b) Der Radius der Punktbildfunktion ergibt sich nach dem Strahlensatz zu:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{D}{L} \left(Z + \frac{L}{2} \right) = \frac{D}{2} + \frac{D}{L} \cdot Z = \frac{1,11 \text{ mm}}{2} + \frac{1,11 \text{ mm}}{24 \text{ mm}} \cdot Z \\
 &= 0,56 \text{ mm} + 0,046 \cdot Z
 \end{aligned}$$